

Vejledning til bivejledere på problembaserede matematikprojekter på Aalborg Universitet

Bettina Dahl Søndergaard Morten Grud Rasmussen
Hans Hüttel Jakob Gulddahl Rasmussen

27. februar 2019

1 Inden semesterstart

Bivejledning foregår i samarbejde med en hovedvejleder som typisk vil være ansat på Institut for Matematiske Fag. Det er en god idé, hvis vejlederne snakker sammen inden semesterstart, eller kort tid efter, for at aftale og afstemme hvordan vejledningen bedst kan foregå, hvem gør hvad? Her kan man blandt andet aftale følgende:

- Skal der afholdes fælles vejledermøder eller hver for sig. Som regel afholder bi- og hovedvejledere separate møder, men det kan være gavnlig at eksempelvis første møde er et fællesmøde.
- Hvilke tanker har begge vejledere om, hvordan et godt projekt vil se ud? Hvad er minimumskravene til et projekt, for at de studerende har en realistisk chance for at bestå til eksamen? Her kan der også aftales, hvordan (om) man vil rådgive gruppen om rapportstruktur, brug af referencer, litteraturhenvi- sning, sprog osv.
- Hvad kunne en problemanalyse indeholde? Vigtigheden af at der er arbejdet med problemanalysen allerede i starten af projektet.
- Hvad er formatet på en problemformulering? Nogle foretrækker punktform, andre en kort tekst. Der kan også være uenigheder om hvorvidt projektafgrænsningen skal stå før eller efter problemformuleringen. Dette er ikke et spørgsmål, der har et klart rigtigt/forkert svar. Det kan stå på forskellig vis, men det er vigtigt, at vejlederne forinden sikrer sig, at de ikke siger noget modsat, eller at de er enige om at sige til de studerende, at de kan gøre det på flere forskellige måder, og det er op til dem at afgøre.
- Hvem har ansvaret for at hjælpe gruppen, hvis der opstår samarbejdsproblemer? Som regel vil det være bivejlederen, men ved store problemer og risiko for eksklusion bør begge vejledere aftale og være enige om vejen frem.

- Hvem har ansvaret for at hjælpe gruppen med projektplanlægningen? Som regel vil det være bivejlederen men hovedvejlederen har en rolle i at målene der sættes op er realistiske.

Senere i projektet er det også vigtigt at afklare, hvordan procesanalysen evalueres til eksamen. Som regel er det bivejleder som giver råd og evt. kommentarer til udkast til procesanalysen undervejs, men inden eksamen skal man have aftalt, hvordan der eksamineres i procesanalysen til eksamen, herunder hvordan den bør præsenteres. Det er her en god idé, at man råder gruppen til, at en studerende ikke kun fremlægger procesanalysen. Denne (eller 'de', hvis man deles) skal også fremlægge noget matematik.

Inden semesterstart kan det desuden være gavnligt hvis bivejlederen orienteres om projektkatalogets indhold og også får mulighed for at komme med forslag til justeringer og formuleringer. Hvis man som bivejleder ikke er blevet kontaktet inden et par uger inden semesterstart, kan man henvende sig til semesterkoordinator og høre, hvem der er vejleder.

2 Hvad er matematik?

Alle har haft matematik i folkeskolen og langt de fleste også på en gymnasial uddannelse. Hvis man har en ingeniørbaggrund eller lignende, vil man typisk også have haft fag som Calculus og Lineær algebra på universitetet. Den viden vil være en stor hjælp i forhold til, at man til en vis grad kan sætte sig ind i, hvad de studerende skriver projekt om på første studieår. Matematikfaget er dog langt mere end dette. Matematik har også en meget abstrakt side, som dem der læser matematik møder i kurser og projekt allerede fra 1. semester. Her er man inde i matematikkens "DNA", som består af en meget abstrakt og teoretisk verden, og hvor eksempelvis ordet "eksempel" ikke altid henviser til noget i den virkelige verden, men eksemplet består af noget andet abstrakt matematik. De studerende trænes i stringent logisk-matematisk ræsonnement, symbolbrug og kommunikation.

Matematik er som sådan ikke en naturvidenskab men har her større ligheder med logik (og filosofi). Det er ikke tilfældigt, at man inden for matematikkens videnskabsteori taler om matematisk platonisme, som henviser til, at Platon opdelte verden i den intelligible ideernes verden og den materielle sanseverden, og matematikken tilhører sammen med filosofien den førstnævnte verden. I den intellegible verden findes de evige (matematiske) sandheder, som vi ser afskygninger af i den materielle sanseverden. I ideernes verden opnås viden (*episteme*) gennem rationel argumentation mens viden i form af meninger (*doxa*) i den materielle verden opnås gennem sanserne og indtryk fra andre. I platonisk forstand er doxa lavere end episteme. Der er dog ikke lighedstegn mellem platonisme og matematik, men matematikken og synet på hvad som er "godt" er præget af denne tankegang. Reuben Hersh skriver det således i sin bog, *What is Mathematics, Really* (Oxford University Press):

The working mathematician is a Platonist on weekdays, a formalist on weekends. On weekdays, when doing mathematics, he's a Platonist, convinced he's dealing with an objective reality whose properties he's trying to determine. On weekends, if challenged to give a philosophical account of this reality, it's easiest to pretend he doesn't believe in it. He plays formalist, and pretends mathematics is a meaningless game. (1997, s. 39).

Matematik er dog samtidig et fag som finder anvendelse i mange discipliner inden for naturvidenskab, ingeniørfag, medicin, økonomi osv.

3 Typer af PBL-projekter i matematik

Matematikken har således både en abstrakt natur og en vigtig rolle som værktøj i andre discipliner. PBL-projekter bør derfor afspejle begge sider af matematikken. PBL er desuden ikke en enkelt fast model, men er kendetegnet ud fra nogle generelle principper, men den præcise udformning er farvet efter fagligheden. Vi skelner derfor mellem *faginterne* og *fageksterne* problemstillinger. Da studiet af matematik er et studium i et grundfag og ikke en profession som for eksempel en ingeniøruddannelse, er de faginterne problemstillinger særligt vigtige, og det er derfor vigtigt at forstå, hvordan et fokus på faginterne problemstillinger kan overføres til PBL-projekter. Der er derfor grundlæggende tre typer PBL-projekter på matematik.

1. I et *projekt med ekstern problemstilling* tager projektet udgangspunkt i en problemstilling uden for matematik. Projektets primære mål vil her være at opnå kompetencer inden for at opstille og anvende en matematisk model til analyse af problemstillingen og identifikation af en matematisk formulering af et problem inden for den eksterne problemstilling. Projektets problem er således en matematisk udgave af et eksternt problem. Det, der driver projektet frem, er en kombination af et ønske om at løse dette problem og ønske om at finde en god model hertil. Modelleringsaspektet er her mindst lige så vigtigt som målet om forståelse af teoridannelserne bag modellen. Statistikprojekter, der anvender et på forhånd givet datasæt, er eksempler på projekter af denne type. De studerende skal dog ikke blot *få overrakt* en problemstilling, de må have en grad af selvbestemmelse i at finde eller vælge en relevant problemstilling ud fra datasættet eller i at videreudvikle det udleverede problem.
2. I et *projekt med intern problemstilling* tager projektet udgangspunkt i at forstå og reflektere over en matematisk teoridannelse. Projektets primære mål vil her være at opnå kompetencer inden for at forstå sammenhænge mellem og begrænsninger i en matematisk teoridannelse. Projektets problem skal formuleres som et spørgsmål om sammenhænge og begrænsninger i en teoridannelse. Det, der driver projektet frem, er ønsket om at skabe en præcis og rationel (re)konstruktion af en matematisk teoridannelse.

Projektrapporter her kan ikke kun opstille teoridannelsen på struktureret vis (definition-sætning-bevis-eksempel-modellen), men kan også præsentere *context of discovery* (omstændighederne der ledte til opdagelsen), herunder motiverende modeksempler og refleksioner over bud på definitioner og formodninger, det har vist sig nødvendigt at forkaste. På sin vis er hele projektet én stor problemanalyse, der ender med at formulere et faginternt problem. Det vil således være et mere grundvidenskabeligt projekt. Grundvidenskab har også samfundsrelevans, men et tidsperspektiv er her nødvendigt, da de ikke nødvendigvis har relevans i en nær fremtid. Grundvidenskab indgår i en form for fødekæde som muligvis en dag vil resultere i et produkt, der anvendes af ikke-forskere. Desuden er forskersamfundet en del af det generelle samfund, og en problemstilling behøver ikke være relevant for *hele* samfundet.

3. I et *projekt med intern problemstilling og ekstern case* tager projektet også udgangspunkt i at forstå og reflektere over en matematisk teoridannelse, men som en vigtig del af projektet er der en case, hvor teoridannelsen bliver brugt til at konstruere en matematisk model for casen, hvorefter analysen af modellen bruges til at præcisere forståelsen og (re)konstruktionen af teoridannelsen. Projektets primære mål vil ligesom i den ovenfor nævnte projekttype være at opnå kompetencer inden for at forstå sammenhænge mellem og begrænsninger i en matematisk teoridannelse, men modelleringsspektet bliver et sekundært mål. Projektrapporter her skal ikke kun opstille teoridannelsen, men også gøre rede for *context of discovery*, herunder casens betydning for teoridannelsen og hvorfor netop denne case er blevet valgt. Her kan de studerende også tage udgangspunkt i en eksisterende model eller metode; det vil sige, de skal ikke nødvendigvis selv konstruere en model. De studerende kan analysere hvorfor og hvordan modellen virker, hvilken matematik og hvilke antagelser og forsimplinger, der ligger bag modellen, herunder diskutere hvorvidt modellerne kan forbedres.

Da bivejledning i dag foregår på første studieår, vil de fleste projekter man er bivejleder på være af type 3 i den nuværende studieordning. Det kan dog ikke udelukkes at senere revideringer også vil indeholde de to andre typer.

Der er også en progression på matematikstudiet, så samme type projekt vil ikke se ens ud på forskellige semestre.

4 Indhold i problemanalyser og perspektiveringer

En projektrapport skal være selvindeholdt og derfor indeholde netop, hvad der er relevant. Rapporten skal for eksempel ikke bruge for meget plads på matematik der allerede må antages at være lært. Dette gælder selvsagt også for problemanalysen. Med hensyn til antallet af sider, kan der derfor ikke gives et

entydigt svar på dette, men erfaringen viser, at en god problemanalyse kan fylde $\frac{1}{2}$ -5 sider. Dette er en del kortere end i projekter for ingeniørfagene, men matematik er en anden fagtradition, og det er vigtigt at se den fagtradition i sin kontekst og derfor ikke umiddelbart overføre normer for andre fag til matematik. Der er desuden en tradition for konsise formuleringer i matematik.

En problemanalyse skal som sagt ikke indeholde noget, der ikke direkte er relevant for udviklingen eller beskrivelsen af problemstillingen. Det kan her være godt at skelne mellem *nice to have* og *need to have*. De studerende vil ofte have svært ved at skelne her, især hvis de har brugt megen tid på et afsnit om noget, der senere viser sig ikke at være strengt nødvendigt. Det samme gør sig gældende for problemanalysen. Det vil sige, at hvis for eksempel en interessentanalyse ikke er relevant, skal den ikke laves. En problemstilling skal heller ikke ændres for at det hermed kan blive nødvendigt med en interessentanalyse, med mindre den nye problemstilling er mere matematisk relevant end den tidligere.

Her er det måske også vigtigt, at der inden for matematik findes en form for implicit norm om, at kort er smukt. En matematiker vil oftest søge at reducere et matematisk udtryk, formel, til mindst muligt, og en matematikbog eller -artikel vil ofte søge at kondensere den matematiske argumentationen mest muligt. Det er ikke unormalt, at det kan tage flere timer blot at læse en enkelt side i en matematikbog. De studerende vil derfor søge at beskrive og bevise matematikken i en projektrapport på mest stringent og kort facon, og denne norm vil de derfor også anvende på problemanalysen.

En problemanalyse skal heller ikke indeholde diskussioner, som ikke reelt set bidrager til en forklaring af problemet. I eksempelvis nogle tilfælde vil en etisk diskussion være *overordnet relevant* hvis emnet for projektet er steganografi, men med mindre det etiske aspekt bidrager til formuleringen af den matematiske problemformulering, skal dette ikke med i en problemanalyse. I stedet vil det være meget relevant at have en sådan diskussion i eksempelvis et diskussions- eller perspektiveringsafsnit, eller som del af en mere generel indledning til rapporten.

Nedenfor er nævnt en række punkter, der er ideer til hvad en problemanalyse kan indeholde. Det skal ikke læses normativt, da der kan være ting der er fornuftige at tage med, men som ikke er på listen nedenunder.

4.1 Hvad kan en problemanalyse indeholde?

- **Processen** Som nævnt ovenfor er det vigtigt at matematikprojekter ikke kun beskriver slutproduktet af en udvikling af matematik, *context of justification*, men de bør også betone *context of discovery* i projektarbejdet, så refleksionerne også bliver synlige og velstrukturerede. Ofte består jagen på en sætning i at indføre og ændre på definitioner af begreber indtil sætningen ender med at være sand. En diskussion og udledning af dette kan udgøre en problemanalyse, således at selve projektet eksemplificerer dette.
- **Historisk** Nogle projekter kan omhandle noget matematik som blev ud-

viklet i en hel bestemt historisk sammenhæng. For eksempel blev lineær programmering udviklet til at optimere flyenes transport af fødevarer under den sovjetiske embargo af Berlin i 1948-1949. En problemanalyse kan her indeholde en redegørelse for og diskussion af den historiske kontekst, som matematikken blev udviklet i, herunder hvordan projektgruppens eget projekt passer i den sammenhæng.

- **Anvendelser** Matematik anvendes i forskellige kontekster. Den abstrakte matematik anvendes inden for forskersamfundet, men mere eller mindre avancerede matematiske metoder anvendes af fagfolk som håndværkere, ingeniører, læger osv, og endelig er der meget matematik (regning) som anvendes af hr. og fru Danmark. En problemanalyse kunne tydeliggøre hvilken af disse tre kontekster/samfund, som projektets problemstilling er i, og analysere og diskutere, hvordan matematikken kan løse dette problem. Konkret kan problemanalysen analysere for eksempel et samfunds eller en virksomheds problem. En anden mulighed er at analysere hvorfor/hvordan en matematisk metode virker. Hvorfor er den så effektiv og hvem anvender den?

4.2 Hvad kan et perspektiveringsafsnit indeholde?

- **Etik** Nogle projekter kan være inden for emnet kryptografi eller steganografi som omhandler, hvordan man gemmer data. Her er der metoder som anvendes både af terrorister og efterretningstjenester. I sådanne projekter vil det være relevant med en etisk redegørelse og diskussion. Her kunne anvendelse af matematisk viden diskuteres, har forskeren et medansvar? Kan et matematisk udtryk være enten ondt eller godt?
- **Videnskabsteori** Alle matematikprojekter vil indeholde en hel del beviser. En perspektivering kan diskutere, hvilke typer matematiske beviser der findes, er alle lige gyldige, hvilke grundantagelser om logisk deduktion og slutningsregler ligger bag, hvad er sand viden?
- **Modellering** Projekter som omhandler en anvendelse af matematik vil ofte også indeholde et matematisk modelleringsaspekt. Desværre forveksler studerende ofte en matematisk model med en matematisk sandhed, så et perspektiveringsafsnit kunne diskutere, hvad en matematisk model egentlig er, herunder hvilke antagelser og forsimplinger af virkeligheden, der ligger bag modellen osv.

4.3 Forskel på problemanalyse og perspektiveringsafsnit

Generelt for begge typer afsnit gælder, at disse ikke må blive afsnit om "alt godt fra havet", men netop indeholde hvad der er relevant for problemstillingen. Problemanalyse skal ikke være unødvendig lang eller omvendt være så kort at den fremstår overfladisk og blot indeholde pseudo-videnskabelige selvfølgeligheder.

Det er vigtigt at hvis nogle grupper vælger en af ovennævnte vinkler, at det beskrives og diskuteres på et informeret niveau med brug af flere kilder o.lign.

Det er også vigtigt, at problemanalysen fremstår som en analyse og ikke blot en gennemgang af for eksempel nogle historiske begivenheder. Det vil sige problemanalysen kan tage udgangspunkt i et bredt område eller problemstillinger, hvor de studerende så gennem problemanalysen snævrer sig ind til at være i stand til at formulere selve den matematiske problemformulering.

Om et historisk aspekt skal stå i en problemanalyse eller i et perspektiveringsafsnit afhænger af, hvordan det historiske bruges. Tages der udgangspunkt i et problem der opstod i en bestemt historisk sammenhæng, hvorefter dette indsnævres til en matematisk problemformulering, kan det fint udgøre en del af en problemanalyse, men hvis det historiske mere har karakter af baggrundsbillede hører det mere hjemme i et perspektiveringsafsnit.

5 Hvem er publikum for et matematikprojekt?

Publikum kan være eksplicit nedfældet i en studieordning og eksempelvis være hr. og fru Danmark. Men hvis ikke andet er nævnt, er den generelle forståelse på Institut for Matematiske Fag at publikum, eller "samfundet", er de andre studerende på samme semester. Det vil sige, at medstuderende skal ved projektaflevering kunne læse og forstå en rapport uden hverken at opleve, at den er for elementær eller for avanceret. Det vil sige, at rapportens publikum er relativt til det uddannelsesstrin, man er på. Man bør hverken tale op eller ned til sit publikum.

Dermed vil der på hvert semester være stadig flere ting, som er underforstået og som der derfor ikke bruges tid på. Eksempelvis vil man ikke i førstesemesterprojekter bruge tid på at forklare i rapporten, hvordan man løser ligninger med en ubekendt og på de senere semestre vil man forudsætte, og derfor ikke beskrive, ting som de studerende har lært på tidligere semestre. Det samme vil gælde for en problemanalyse. Matematik er en forskningsbaseret uddannelse og i forskningsartikler fremstår det man med et PBL-udtryk kan kalde for en problemanalyse meget kort, og det er ikke altid eksplicit formuleret hvorfor det er relevant at bekræftige sig med den givne problematik. Læseren forventes at vide at dette er tilfældet. Ellers ville læseren ikke være at finde i dette forskningsområde. Så spørgsmålet om, hvor eksplicit man skal redegøre for relevancen af en problemstilling afhænger af svaret på spørgsmålet, om den generelle studerende ved et givet semester ville opfatte dette som en selvfølgelighed eller at det er noget denne ikke ville forventes at kunne vide. For at afklare dette er det nødvendigt med en diskussion med gruppen. Det vil sige, at for anvendelsesorienterede projekter vil en problemanalyse af eksempelvis en virksomheds problem skulle foretages, da der her er tale om et konkret tilfælde og hvor virksomhedens behov er under stadig forandring.

6 Bivejlederens egen faglighed

Ikke alle bivejledere har en matematikbaggrund. Hvordan kan man så bidrage som bivejleder? For det første har man en meget vigtig rolle med at vejlede de studerende i PBL-kompetencer i for eksempel samarbejde, projektstyring, kommunikation mm. Men man kan også have en vigtig rolle i perspektivering af projekterne og at diskutere med de studerende om de elementer, de medtager i deres problemanalyse, reelt er med til at indsnævne eller forklare en problemstilling. Dette vil man kunne gøre uden en decideret matematikbaggrund. Bivejledere med matematikbaggrund kan indgå på mere detaljeret niveau med problemanalyse til diskussion af matematiske forhold, men denne vil måske have færre aspekter at byde ind med i forhold til en perspektivering af projektet.